

CONCOURS 1999 POUR LE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES
TITULAIRES DE L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE
- OPTION MATHÉMATIQUES -
TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
Durée 2 heures

Un corrigé

Preliminaire

1. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Il existe une partition (I, J) de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $a_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \in I \times J$ avec $p = \text{card } I$, on a $1 \leq p \leq n - 1$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $I = \{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$, $J = \{\sigma(p+1), \dots, \sigma(n)\}$, ce qui donne :

$$T^{-1}AT = (A_{\sigma(i), \sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{R})$

2. Si A est réductible, il existe alors une matrice de permutation T telle que $T^{-1}AT$ soit de la forme $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ et pour tout entier $m \geq 1$ on a $T^{-1}A^mT = \begin{pmatrix} B^m & 0 \\ C' & D^m \end{pmatrix}$ où $C' \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbf{R})$, ce qui signifie que la matrice A^m est également réductible, elle a donc au moins un coefficient nul. Ce qui est absurde et donc A n'est pas réductible.
3. Les composantes du vecteur $y = (I_n + A)x$ sont données par :

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Comme A et le vecteur x sont positifs, on a alors $y_i \geq x_i \geq 0$ et y est positif. Avec $y \geq x$, on déduit que y est strictement positif si x l'est. En supposant que x a au moins une composante nulle, de $0 \leq x_i \leq y_i$, on déduit que $y_i = 0$ entraîne $x_i = 0$. Le nombre de coordonnées nulles du vecteur y est donc inférieur ou égal à celui de x . Supposons que y et x ont le même nombre de coordonnées nulles. En notant

$$J_x = \{i \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i = 0\},$$

on a $y_i > 0$ pour $i \notin J_x$ et en conséquence $y_i = x_i = 0$ pour tout $i \in J_x$, avec $y_i = \sum_{j \notin J_x} a_{ij}x_j$ et $x_j > 0$ pour $j \notin J_x$. On a donc en tenant compte du fait que les coefficients a_{ij} sont positifs ou nuls, $a_{ij} = 0$ pour $i \in J_x$ et $j \notin J_x$ avec $\text{card } J_x = p$ compris entre 1 et $n - 1$ (x a exactement p composante) ce qui revient à dire que la matrice A est réductible.

En conclusion le nombre de composantes nulles de y est strictement inférieur à celui de x . Donc le vecteur $(I_n + A)x$ a au moins $p + 1$ coordonnées strictement positives.

Par récurrence on déduit alors que le vecteur $(I_n + A)^{n-1}x$ a au moins n coordonnées strictement positives, ce qui revient à dire qu'il est strictement positif. En appliquant $n - 1$ fois ce résultat à chacun des vecteurs de la base canonique, on constate que toutes les colonnes de $(I_n + A)^{n-1}$ ont n coefficients non nuls.

Problème

1. Pour $x \in \Delta$, il existe au moins un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_i \neq 0$. Donc l'ensemble $\left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i} \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } x_i > 0 \right\}$ est non vide et fini, donc $\min \left\{ \frac{(Ax)_i}{x_i} \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } x_i > 0 \right\}$ existe.

Par la définition de $r(x)$ les coordonnées de $Ax - r(x)x$ qui sont $(Ax)_i - r(x)x_i$, $1 \leq i \leq n$, sont positives. Donc on peut conclure que $r(x)$ est le plus grand réel positif λ tel que les coordonnées de $Ax - \lambda x$ soient strictement positives.

2. Si $Ax - r(x)x = 0$, alors $r(x)$ est une valeur propre de A ($x \neq 0$) et x est un vecteur propre associé. Donc $y = (\mathbf{I}_n + A)^{n-1}x$ est aussi un vecteur propre associé $r(x)$, d'où $Ay - r(x)y = 0$ et par conséquent $r(x) = \frac{(Ay)_i}{y_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $y_i \neq 0$, d'où $r(x) = r(y)$.

Sinon $Ax - r(x)x \neq 0$ et ses coordonnées sont positives, donc $Ax - r(x)x \in \Delta$ et par conséquent les coordonnées de $(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}(Ax - r(x)x)$ sont strictement positives (d'après 1.3). Mais

$$(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}(Ax - r(x)x) = (A - r(x)\mathbf{I}_n)((\mathbf{I}_n + A)^{n-1}x) = Ay - r(x)y$$

Donc les coordonnées de $Ay - r(x)y$ sont strictement positives et donc $r(x) < \frac{(Ay)_i}{y_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $y_i \neq 0$, d'où $r(x) < r(y)$.

3. M est un fermé borné de $\mathbf{R}^n$, donc compact. N est l'image par l'application continue $(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}$ (linéaire en dimension finie) du compact M , donc N est un compact de $\mathbf{R}^n$.

Les formes linéaires $x \mapsto x_i$ et $x \mapsto (Ax)_i$ sont continues pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc les applications $\varphi_i : x \mapsto \frac{(Ax)_i}{x_i}$ sont continues sur N . D'où la continuité de $r = \min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\varphi_i)$.

4. Par continuité de l'application r et la compacité de N , il existe $z \in N$ tel que $r(z) = \max_{y \in N} r(y)$. Ainsi,

$$\forall y \in N, \quad r(y) \leq r(z).$$

5. Si $\alpha > 0$ et $x \in \Delta$, on a $r(\alpha x) = r(x)$. En effet

$$r(\alpha x) = \min_{\alpha x_i \neq 0} \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}(\alpha x_j)}{\alpha x_i} = \min_{x_i \neq 0} \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j)}{x_i} = r(x).$$

Donc, $\forall x \in \Delta$, $r(x) = r\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ et $\sup_{x \in \Delta} r(x) = \sup_{x \in M} r(x)$. On a plus précieusement,

$$\sup_{x \in \Delta} r((\mathbf{I}_n + A)^{n-1}x) = \sup_{x \in M} r((\mathbf{I}_n + A)^{n-1}x) = \sup_{x \in N} r(x) = r(z)$$

Posons $y = (\mathbf{I}_n + A)^{n-1}x$. On a $r(y) \geq r(x)$.

$$\sup_{x \in M} r((\mathbf{I}_n + A)^{n-1}x) = \sup_{y \in N} r(y) \geq \sup_{x \in M} r(x) = \sup_{x \in \Delta} r(x).$$

D'où, $\forall x \in \Delta$, $r(x) \leq \tilde{r}$.

6. Supposons que $\xi = Az - \tilde{r}z$ est non nul. On sait que $\xi \geq 0$. Comme $(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}$ est strictement positive, alors $(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}\xi$ est strictement positif. De la relation

$$(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}Az = \tilde{r}(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}z + (\mathbf{I}_n + A)^{n-1}\xi$$

on déduit donc la relation suivante :

$$(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}Az > \tilde{r}(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}z$$

Posons $z' = (\mathbf{I}_n + A)^{n-1}z$. De la relation précédente il résulte que $Az' > \tilde{r}z'$, on peut donc trouver $\varepsilon > 0$ tel que $Az' \geq (\tilde{r} + \varepsilon)z'$ ce qui contredit la maximalité de $r(z) = \tilde{r}$. Donc $\xi = 0$ et on a $Az = \tilde{r}z$. $\tilde{r}$ est donc bien une valeur propre de A et z un vecteur propre associé à $\tilde{r}$.

Montrons maintenant que $\tilde{r} > 0$. On a :

$$(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}Az = \tilde{r}(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}z = \tilde{r}(\mathbf{I}_n + A)^{n-2}(\mathbf{I}_n + A)z = \tilde{r}(1 + \tilde{r})(\mathbf{I}_n + A)^{n-2}z.$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$A(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}z = \tilde{r}(1 + \tilde{r})^{n-1}z.$$

z étant positif, non nul, $(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}z$ est strictement positif ainsi que $A(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}z$. Mais pour que $\tilde{r}(1 + \tilde{r})^{n-1}z$ soit strictement positif il est nécessaire que z soit strictement positif, ainsi que $\tilde{r}$.

7. Si $y \in \Delta$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\tilde{r}$, alors on a :

$$A(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}y = \tilde{r}(1 + \tilde{r})^{n-1}y.$$

Le vecteur y étant positif, non nul, $(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}y$ est strictement positif ainsi que $A(\mathbf{I}_n + A)^{n-1}y$. Donc $\tilde{r}(1 + \tilde{r})^{n-1}y$ est strictement positif ce qui implique $y > 0$.

8. De l'égalité $Ay = \alpha y$, on a $\alpha y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\alpha||y_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}|y_j|$$

On a donc y^+ est positif et $|\alpha|y^+ \leq Ay^+$, c'est-à-dire $Ay^+ - |\alpha|y^+ \in \Delta$. Par définition de $r(y^+)$ et de $\tilde{r}$ on a :

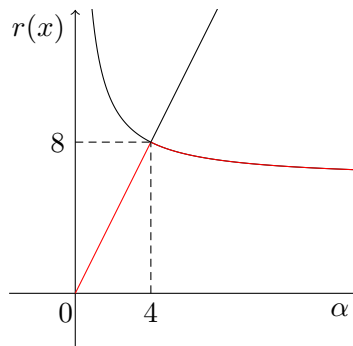
$$|\alpha| \leq r(y^+) \leq \tilde{r}.$$

9. Supposons $\alpha = \tilde{r}$, on a donc $\tilde{r}y^+ \leq Ay^+$. D'après ce qui précède $\tilde{r}y^+ = Ay^+$ et donc y^+ est strictement positif ce qui implique nécessairement que les coordonnées de y sont toutes non nulles.
10. soit x et y deux vecteurs de $\mathbf{C}^n$ vecteurs propres de A associés à $\tilde{r}$. D'après ce qui précède, on a $x^+ > 0$ et $y^+ > 0$. Soit $z = y - \frac{y_1}{x_1}x = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. On a $z_1 = 0$ et $Az = \tilde{r}z$. Si $z \neq 0$, alors $|z| = z^+ > 0$. Mais on n'a pas $z^+ > 0$ car $z_1 = 0$. Donc $z = 0$, c'est-à-dire $y = \lambda x$ avec $\lambda = \frac{y_1}{x_1}$. Cela montre que $\dim \ker(A - \tilde{r}\mathbf{I}_n) \leq 1$, et comme $\tilde{r}$ est une valeur propre, alors $\dim \ker(A - \tilde{r}\mathbf{I}_n) \geq 1$, d'où

$$\dim \ker(A - \tilde{r}\mathbf{I}_n) = 1$$

Application numérique

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 48 & 52 \end{pmatrix}$ n'a aucun coefficient nul, donc A n'est pas réductible.
2. On a $Ax = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 8x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$, donc $\frac{(Ax)_1}{x_1} = \frac{2x_2}{x_1} = 2\alpha$ et $\frac{(Ax)_2}{x_2} = \frac{8x_1 + 6x_2}{x_1} = \frac{8}{\alpha} + 6$. Par conséquent $r(x) = \min_{\alpha > 0} \left(2\alpha, \frac{8}{\alpha} + 6 \right)$.



3. D'après la courbe $\tilde{r} = r(4) = 8$, et donc le sous-espace propre associé est l'ensemble $\{ (x_1, 4x_1) \mid x_1 \in \mathbf{R} \} = \text{Vect}\{(1, 4)\}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $B^n = (b_{ij}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq 3}$. On peut vérifier par récurrence que les coefficients de B^n sont positifs.

Pour montrer que $(B^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, il suffit de montrer, par exemple, que le coefficient $b_{33}^{(n)}$ ne tend pas vers 0. En effet, on a $b_{33}^{(1)} = 1 \geq 1$, supposons donc $b_{33}^{(n)} \geq 1$. On a :

$$B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} b_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & b_{13}^{(n)} \\ b_{21}^{(n)} & b_{22}^{(n)} & b_{23}^{(n)} \\ b_{31}^{(n)} & b_{32}^{(n)} & b_{33}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(n+1)} & b_{12}^{(n+1)} & b_{13}^{(n+1)} \\ b_{21}^{(n+1)} & b_{22}^{(n+1)} & b_{23}^{(n+1)} \\ b_{31}^{(n+1)} & b_{32}^{(n+1)} & b_{33}^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

où $b_{33}^{(n+1)} = \frac{1}{4}b_{31}^{(n)} + b_{32}^{(n)} + b_{33}^{(n)} \geq b_{33}^{(n)} \geq 1$, donc $(B^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.

• • • • •